

الصفحة	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	∞
2			
4			

التمرين 1: (8 نقط)

الجزء I: - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I =]-\infty, 1[$ بما يلي: $f(x) = \ln(1-x)$
و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1- أ) بين أن الدالة f متصلة على I 0.25

ب) بين أن الدالة f تناقصية قطعاً على I 0.25

ج) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 0.75

د) أول مبيانيا النتائج المحصل عليها. 0.5

هـ) اعط جدول تغيرات f 0.25

2- أ) بين أن المنحنى (C) مقعر. 0.25

ب) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) 0.25

3- أ) بين أن الدالة f تقابل من I نحو \mathbb{R} 0.25

نرمز بالرمز f^{-1} لتقابلها العكسي.

ب) حدد $f^{-1}(x)$ من أجل $x \in \mathbb{R}$ 0.25

ج) تحقق أن: $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$ 0.25

الجزء II- لكل عدد حقيقي x و لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، نضع:

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

1- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد $x_n \in]0, 1[$ بحيث: $P_n(x_n) = 1$ 0.5

2- حدد العدد الحقيقي $\alpha = x_2$ و تحقق أن: $0 < \alpha < 1$ 0.5

3- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، لدينا: $P_{n+1}(x_n) > 1$ 0.5

ب) استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$ ، المعرفة حسب ما سبق، تناقصية قطعاً. 0.5

ج) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، لدينا: $x_n \in]0, \alpha]$ 0.25

د) بين أن المتتالية $(x_n)_{n \geq 2}$ متقاربة. 0.25

4- لكل عدد حقيقي $x \in I$ و لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، نضع: $f_n(x) = f(x) + P_n(x)$

أ) بين أن: $(\forall x \in I) ; (\forall n \geq 2) \quad f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x}$ 0.5

ب) بين أن: $(\forall x \in [0, \alpha]) ; (\forall n \geq 2) \quad |f'_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ 0.25

الصفحة	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2021 - الموضوع	∞
3		- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	
4			

(ج) استنتج أن: $(\forall x \in [0, \alpha]) ; (\forall n \geq 2) \quad |f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ 0.5

(د) بين أن: $(\forall n \geq 2) \quad |f(x_n) + 1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$ 0.5

(هـ) استنتج قيمة $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 0.5

التمرين 2: (4 نقط)

نعتبر الدالة F المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $F(x) = \int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}} dt$

1- ا) حدد إشارة $F(x)$ حسب قيم x 0.5

ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و احسب مشتقتها الأولى $F'(x)$ 1

2- ا) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، بين أن: $\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 (1-x) e^{x-\frac{x^2}{2}} dx$ 0.5

ب) احسب $\int_0^1 F(x) dx$ 0.5

3- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \left((n-k) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

ا) تحقق أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} (n-k) F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} (n-k) F\left(\frac{k}{n}\right)$ 0.5

ب) بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} F\left(\frac{k}{n}\right)$ 0.5

ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها. 0.5

التمرين 3: (4 نقط)

m عدد عقدي مخالف للعددين 2 و $-i$ و المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O; \bar{u}, \bar{v})$

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - (m-i)z - im = 0$: (E)

1) ا- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو $(m+i)^2$ 0.5

ب- حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) 0.5

ج - علما أن $m = e^{i\frac{\pi}{8}}$ ، اكتب العدد $z_1 + z_2$ على الشكل الأسّي. 0.75

2) نعتبر النقط A و B و M التي أحاقها على التوالي 2 و $-i$ و m ولتكن M' مماثلة M بالنسبة للمحور التخيلي.

الصفحة	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	∞
4	4		

0.5 ا- حدد لحق النقطة M' بدلالة m

0.75 ب - حدد بدلالة m ، لحق النقطة N بحيث يكون الرباعي $ANM'B$ متوازي الأضلاع

1 ج - بين أن المستقيمين (AM) و (BM') متعامدين إذا و فقط إذا كان: $\text{Re}((2-i)m) = \text{Re}(m^2)$

التمرين 4: (4 نقط)

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2. نضع:

$$A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$$

ليكن p عددا أوليا فرديا بحيث: p يقسم A

1 1- أ) بين أن $a^7 \equiv 1 [p]$ ، استنتج أن: $a^{7n} \equiv 1 [p]$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1 ب) بين أن a و p أوليان فيما بينهما، استنتج أن: $a^{(p-1)m} \equiv 1 [p]$; $\forall m \in \mathbb{N}$

2- نفترض أن 7 لا يقسم $p-1$

0.5 أ) بين أن: $a \equiv 1 [p]$

0.5 ب) استنتج أن: $p = 7$

1 3- بين أنه إذا كان p عددا أوليا فرديا بحيث: p يقسم A فإن: $p = 7$ أو $p \equiv 1 [7]$

انتهى